数理解析研究所講究録
109巻 1971年 83-92



# FORMACを利用した級数の逆転

電気試験所　戸田英雄

$$y = x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k \tag{1}$$

の逆転

$$x = y + \sum_{k=2}^{\infty} b_k y^k \tag{2}$$

を求める問題を例にして、FORMACによる数式処理のプログラムを述べる。

## 1. 算法

i) (2)を(1)に代入して未定係数法で順に $b_k$ $(k=2,3,\cdots)$ を定めていく方法

ii) 山内の式を用いる方法、すなわち、

$b_k$ は

$$b_k = \sum_{n=1}^{k-1} (-)^n (k+n-1)^{(n-1)} \sum_{\beta=k+n-1}^{\alpha=n} \left[\frac{a^m}{m!}\right] \tag{3}$$

ここで、

$\sum_{\beta=k+n-1}^{\alpha=n} \left[\frac{a^m}{m!}\right]$ は $\frac{a_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{a_3^{m_3}}{m_3!}\cdots$ の積において

$$\alpha = \sum_{i=2} m_i \quad , \quad \beta = \sum_{i=2} i \cdot m_i$$

であるあらゆる組合せの総和の意味である.

たとえば,

$$b_2 = -\frac{a_2}{1!}$$

$$b_3 = -\frac{a_3}{1!} + 4^{(1)}\frac{a_2^2}{2!}$$

$$b_4 = -\frac{a_4}{1!} + 5^{(1)}\frac{a_2}{1!}\frac{a_3}{1!} - 6^{(2)}\frac{a_2^3}{3!}$$

$$b_5 = -\frac{a_5}{1!} + 6^{(1)}\left(\frac{a_2}{1!}\frac{a_4}{1!} + \frac{a_3^2}{2!}\right) - 7^{(2)}\frac{a_2^2}{2!}\frac{a_3}{1!} + 8^{(3)}\frac{a_2^4}{4!}$$

$$b_6 = -\frac{a_6}{1!} + 7^{(1)}\left(\frac{a_2 a_5}{1!\,1!} + \frac{a_3 a_4}{1!\,1!}\right) - 8^{(2)}\left(\frac{a_2^2}{2!}\frac{a_4}{1!} + \frac{a_2}{1!}\frac{a_3^2}{2!}\right)$$
$$+ 9^{(3)}\frac{a_2^3}{3!}\frac{a_3}{1!} - 10^{(4)}\frac{a_2^5}{5!}$$

$$b_7 = -\frac{a_7}{1!} + 8^{(1)}\left(\frac{a_2}{1!}\frac{a_6}{1!} + \frac{a_3}{1!}\frac{a_5}{1!} + \frac{a_4^2}{2!}\right)$$
$$- 9^{(2)}\left(\frac{a_2^2}{2!}\frac{a_5}{1!} + \frac{a_2}{1!}\frac{a_3}{1!}\frac{a_4}{1!} + \frac{a_3^3}{3!}\right)$$
$$+ 10^{(3)}\left(\frac{a_2^3}{3!}\frac{a_4}{1!} + \frac{a_2^2}{2!}\frac{a_3^2}{2!}\right) - 11^{(4)}\frac{a_2^4}{4!}\frac{a_3}{1!} + 12^{(5)}\frac{a_2^6}{6!}$$

IBM 360/75 PL/I FORMAC で, i) と ii) を試みたが, $k \geqq 10$ では両者とも時間がかかる. i) の方法では数式処理的な FORMAC の機能は十分に利用するが, 10〜20 分のオーダの時間がかかる. ii) の方法は, FORMAC の機能の一部分, すなわち多倍長の整数計算 (2295 桁まで) だけを利用しただけで 5〜10 分のオーダで出来る. したがって実用的には ii) の方がよい.

## 2．数値例

(1) $y = e^{x} - 1 \doteqdot x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}$

$x = \log(1+y) \doteqdot y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots - \frac{y^{10}}{10}$

(2) $y = \log(1+x) \doteqdot x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{10}}{10}$

$x = e^{y} - 1 \doteqdot y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{y^{10}}{10!}$

(3) $y = \tan^{-1} x \doteqdot x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{x^{21}}{21}$

$x = \tan y \doteqdot y + \frac{y^3}{3} + \frac{2}{15} y^5 + \cdots + \frac{1\ 88884\ 66084}{19489\ 64774\ 00625} y^{21}$

| | | |
|---|---|---|
| 計算時間 | (1)と(2) | 2.1分 |
| | (3) | 3分 |

## 3．検討

(2)の方法は，(1)に比べて約1/2〜1/3の時間で済む．このプログラムは附録にのせるが，本質的な部分は，整数αを2以上の整数でβ分割するprocedure PARTITにある．

一松氏やその他の数学者の立派なアルゴリズムもあって，筆者のやり方が最善とは思わない．

また，(3)の場合の$\tan^{-1}x$のように奇関数の場合には，専用のプログラムを用いた方が時間が半分以下ですむ.([2]を見よ.)

## 4. 文献


[1] 級数の逆転の一般式とそのプログラム，山内二郎，戸田英雄，第8回プログラミング・シンポジウム報告集（1967）

[2] 奇関数の整多項式の逆転について，戸田英雄，情報処理（投稿中）


## 5. 附録

別紙

オフセット印刷

附録

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
  INVS: PROCEDURE OPTIONS(MAIN) ;
        FORMAC_OPTIONS ;
       DCL   FX   CHAR(72) ;
        DCL KK(0:100)     BIN    FIXED(31,0) ;
        DCL  P(0:100)      BIN   FIXED(31,0) ;
        DCL(L,K,N,J,MM)           BIN      FIXED (31,0) ;
  START:  ON ENDFILE(SYSIN) GO TO CLOSE ;
        PUT PAGE;
/* SET A(I)= 1/ FAC(I) */
       GET  LIST (NO) ;
       DO   L=1  TO   NO   ;
       GET LIST( FX) ;
       LET ( A("L")= "FX" );
         PRINT_OUT( A("L")) ;
        END ;
        DO   K=2 TO NO        ;
         PUT SKIP(8);
        LET ( SBKN = 0 ) ;
         DO N=1 TO K-1 ;
          LET( SUM=0 ) ;
        MM= K-1+N ;
          CALL PARTIT( MM ,N ) ;
        LET( SBKN= SBKN +BKN ) ;
        END;
       LET ( B("K") = SBKN ) ;
        END;
       PUT SKIP(4) ;
       LET( B("1") = 1 ) ;
       DO  K=1 TO  NO  ;
       PRINT_OUT( B("K")) ;
       END ;
       GO TO START ;
  PARTIT: PROCEDURE(MM,N);
          DECLARE (M,N,MM)            BIN FIXED (31,0) ;
          DECLARE (I,J,S,JJ,KJ,II) BIN   FIXED (31,0) ;
        M=MM;
        KK(1)=1 ;
        DO I=2 TO N ;  KK(I)=2 ;  END;
        J=0 ;
  L51:  I=J ;
        KK(I+1)=KK(I+1)+1;
        IF I=0 THEN GO TO L53;
  L52:  KK(I)=KK(I+1);
        I=I-1 ;
        IF I=0 THEN GO TO L53;
        GO TO L52 ;
  L53:  S=0 ;
        DO I=1 TO N ;  S=S+KK(I); END;
        IF M=S THEN GO TO L22 ;
     IF M< S  THEN GO TO L21 ;
        IF M>S THEN GO TO L23 ;
  L22: DO I=1 TO  50 ; P(I)=0 ;  END;
       DO JJ=1 TO  N ; KJ=KK(JJ);P(KJ)=P(KJ)+1 ; END;
       CALL TERM(K,N);
  L21: J=J+1;
       GO TO L56 ;
  L23: J=0 ;
  L56: IF J ¬= N  THEN GO TO L51;
  END PARTIT;
```

```
TERM: PROCEDURE(K,N);
      DECLARE (K,N,KN1)     BIN   FIXED(31,0) ;
      DECLARE (L,PL,KL)     BIN   FIXED(31,0) ;
      LET( U=1 );
     DO  L=1 TO N ;
      KL =KK(L);
      LET(U =U* A("KL")) ;
     END;
     DO   L=1 TO 50 ;
      PL =P(L) ;
      IF PL <= 1   THEN GO TO SKIP ;
      LET(U =U / FAC( "PL")) ;
SKIP:
     END;
      LET( SUM=SUM +U );
      KN1 = K+N-1 ;
      LET(BKN = FAC("KN1") /FAC("K") *SUM);
      IF (N/2)*2 =N   THEN GO TO CONTINUE ;
      LET( BKN=-BKN) ;
 CONTINUE:
      END TERM;
 CLOSE:  CLOSE FILE(SYSPRINT) ;
  END INVS;
```

(1) $y = e^{x}-1$ から $x = \log(1+y)$

A(1) = 1

A(2) = 1/2

A(3) = 1/6

A(4) = 1/24

A(5) = 1/120

A(6) = 1/720

A(7) = 1/5040

A(8) = 1/40320

A(9) = 1/362880

A(10) = 1/3628800

$y=e^{x}-1 \doteqdot x + x^2/2! + \cdots + x^{10}/10!$ の係数

B(1) = 1

B(2) = - 1/2

B(3) = 1/3

B(4) = - 1/4

B(5) = 1/5

B(6) = - 1/6

B(7) = 1/7

B(8) = - 1/8

B(9) = 1/9

B(10) = - 1/10

$x = \log(1+y) \doteqdot y - y^2/2 + \cdots - y^{10}/10$ の係数

90 (2) $y = \log(1+x)$ から $x = e^y - 1$

A(1) = 1

A(2) = - 1/2

A(3) = 1/3

A(4) = - 1/4

A(5) = 1/5

A(6) = - 1/6

A(7) = 1/7

A(8) = - 1/8

A(9) = 1/9

A(10) = - 1/10

$y = \log(1+x) \doteqdot x - x^2/2 + \cdots - x^{10}/10$ の係数

B(1) = 1

B(2) = 1/2

B(3) = 1/6

B(4) = 1/24

B(5) = 1/120

B(6) = 1/720

B(7) = 1/5040

B(8) = 1/40320

B(9) = 1/362880

B(10) = 1/3628800

$x = e^y - 1 \doteqdot y + y^2/2! + \cdots + y^{10}/10!$ の係数

(3) $y=\tan^{-1}x$ から $x=\tan y$



```
A(1) = 1
---------
A(2) = 0
---------
A(3) =  - 1/3
--------------
A(4) = 0
---------
A(5) = 1/5
-----------
A(6) = 0
---------
A(7) =  - 1/7
--------------
A(8) = 0
---------
A(9) = 1/9
-----------
A(10) = 0
----------
A(11) =  - 1/11
----------------
A(12) = 0
----------
A(13) = 1/13
-------------
A(14) = 0
----------
A(15) =  - 1/15
----------------
A(16) = 0
----------
A(17) = 1/17
-------------
A(18) = 0
----------
A(19) =  - 1/19
----------------
A(20) = 0
----------
A(21) = 1/21
-------------
```

$y=\tan^{-1}x$

$\fallingdotseq x - x^3/3 + x^5/5 - \cdots + x^{21}/21$ の係数

```
B(1) = 1
--------
B(2) = 0
--------
B(3) = 1/3
----------
B(4) = 0
--------
B(5) = 2/15
-----------
B(6) = 0
--------
B(7) = 17/315
-------------
B(8) = 0
--------
B(9) = 62/2835
--------------
B(10) = 0
---------
B(11) = 1382/155925
-------------------
B(12) = 0
---------
B(13) = 21844/6081075
---------------------
B(14) = 0
---------
B(15) = 929569/638512875
------------------------
B(16) = 0
---------
B(17) = 6404582/10854718875
---------------------------
B(18) = 0
---------
B(19) = 443861162/1856156927625
-------------------------------
B(20) = 0
---------
B(21) = 18888466084/194896477400625
-----------------------------------
```

$x = \tan y \doteqdot y + y^3/3 + \frac{2}{15}y^5 + \cdots$ の係数

ELAPSED TIME (HR) ... .050